

A photograph of a skateboarder in mid-air, performing a trick on a concrete ramp at a skate park. The skateboarder is wearing a white long-sleeved shirt and dark pants. The ramp is light-colored concrete. In the background, there are trees and a fence. The text is overlaid on the image.

BAB 2 FUNGSI KUADRATIK

Matematik Tambahan Tingkatan 4 KSSM

Oleh cikgu Norazila Khalid

Smk Ulu Tiram, Johor

Persamaan dan Ketaksamaan Kuadratik



$ax^2 + bx + c = 0$ dengan keadaan a , b dan c ialah pemalar dan $a \neq 0$.

Penyelesaian atau punca-punca bagi persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ ialah koordinat- x bagi titik-titik persilangan antara graf $y = ax^2 + bx + c$ dengan paksi- x .

Menyelesaikan persamaan kuadratik menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua dan rumus

Contoh 1

Selesaikan persamaan berikut dengan menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua.

(a) $x^2 + 4x - 7 = 0$

(b) $-3x^2 + 6x - 1 = 0$

Kaedah penyempurnaan kuasa dua

Penyelesaian

$$(a) \quad x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$x^2 + 4x = 7$$

$$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 7 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 4x + 2^2 = 7 + 2^2$$

$$(x + 2)^2 = 11$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{11}$$

$$x = -5.317 \quad \text{atau} \quad x = 1.317$$

Maka, penyelesaian bagi persamaan $x^2 + 4x - 7 = 0$ ialah -5.317 dan 1.317 .

Pindahkan sebutan pemalar
di sebelah kanan persamaan

Tambahkan sebutan $\left(\frac{\text{pekali } x}{2}\right)^2$ di
sebelah kiri dan kanan persamaan

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$\text{b) } -3x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$$

Bahagikan kedua-dua belah persamaan dengan -3 supaya pekali x^2 menjadi 1

$$x^2 - 2x = -\frac{1}{3}$$

$$x^2 - 2x + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{-2}{2}\right)^2$$

Tambahkan $\left(\frac{-2}{2}\right)^2$ di kedua-dua belah persamaan

$$x^2 - 2x + (-1)^2 = -\frac{1}{3} + (-1)^2$$

$$(x - 1)^2 = \frac{2}{3}$$

$$x - 1 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x = 0.1835 \quad \text{atau} \quad x = 1.8165$$

Maka, penyelesaian bagi persamaan $-3x^2 + 6x - 1 = 0$ ialah 0.1835 dan 1.8165.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kaedah rumus

Contoh 2

Selesaikan persamaan $2x^2 - 2x - 3 = 0$ dengan menggunakan rumus.



Penyelesaian

Bandungkan persamaan yang diberi dengan persamaan bentuk am $ax^2 + bx + c = 0$. Maka, $a = 2$, $b = -2$ dan $c = -3$.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4}$$

$$x = \frac{2 - \sqrt{28}}{4} \quad \text{atau} \quad x = \frac{2 + \sqrt{28}}{4}$$

$$= -0.823 \quad \text{atau} \quad = 1.823$$

Maka, penyelesaian bagi persamaan $2x^2 - 2x - 3 = 0$ ialah -0.823 dan 1.823 .

Latih Diri 2.1

1. Selesaikan persamaan kuadratik berikut dengan menggunakan kaedah penyempurnaan kuasa dua. Berikan jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan.

(a) $x^2 + 4x - 9 = 0$

(b) $x^2 - 3x - 5 = 0$

(c) $-x^2 - 6x + 9 = 0$

(d) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

(e) $4x^2 - 8x + 1 = 0$

(f) $-2x^2 + 7x + 6 = 0$

2. Selesaikan persamaan kuadratik berikut dengan menggunakan rumus. Berikan jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan.

(a) $x^2 - 4x - 7 = 0$

(b) $2x^2 + 2x - 1 = 0$

(c) $3x^2 - 8x + 1 = 0$

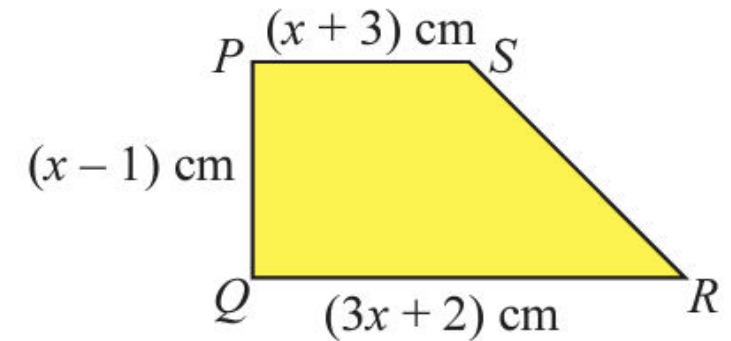
(d) $4x^2 - 3x - 2 = 0$

(e) $(x - 1)(x - 3) = 5$

(f) $(2x - 3)^2 = 6$



3. (a) Panjang pepenjuru bagi sebuah segi empat tepat ialah 10 cm. Jika panjangnya lebih 2 cm daripada lebar, cari ukuran panjang dan lebar segi empat tepat itu.
(b) Cari ukuran bagi sebuah segi empat tepat dengan perimeter 26 cm dan luas 40 cm^2 .
4. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah trapezium $PQRS$ dengan keadaan $PQ = (x - 1) \text{ cm}$, $PS = (x + 3) \text{ cm}$ dan $QR = (3x + 2) \text{ cm}$. Diberi luas trapezium itu ialah 17 cm^2 , cari nilai x .



Membentuk persamaan kuadratik daripada punca-punca

$$\text{Hasil tambah punca} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Hasil darab punca} = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

Oleh itu, persamaan kuadratik dengan punca-punca α dan β boleh ditulis sebagai:

$$x^2 - (\text{hasil tambah punca})x + (\text{hasil darab punca}) = 0$$

Contoh 3

Bentukkan persamaan kuadrat dengan punca-punca 3 dan -5 .

Penyelesaian

Diberi $\alpha = 3$ dan $\beta = -5$.

$$\begin{aligned}\text{Hasil tambah punca, } \alpha + \beta &= 3 + (-5) \\ &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Hasil darab punca, } \alpha\beta &= 3 \times (-5) \\ &= -15\end{aligned}$$

Maka, persamaan kuadrat dengan punca-punca 3 dan -5 ialah

$$\begin{aligned}x^2 - (\text{hasil tambah punca})x + (\text{hasil darab punca}) &= 0 \\ x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta &= 0 \\ x^2 - (-2)x + (-15) &= 0 \\ x^2 + 2x - 15 &= 0\end{aligned}$$

Kaedah Alternatif

$$\begin{aligned}(x - 3)(x + 5) &= 0 \\ x^2 + 5x - 3x - 15 &= 0 \\ x^2 + 2x - 15 &= 0\end{aligned}$$

Contoh 4

Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik $2x^2 + x = 4$, bentukkan persamaan yang mempunyai punca-punca berikut.

- (a) $\alpha + 3, \beta + 3$
- (b) $2\alpha, 2\beta$
- (c) α^2, β^2



Penyelesaian

$2x^2 + x - 4 = 0$ dengan $a = 2$, $b = 1$ dan $c = -4$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \text{ dan } \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{4}{2} = -2$$

(a) Hasil tambah punca:

$$\begin{aligned}(\alpha + 3) + (\beta + 3) &= (\alpha + \beta) + 6 \\ &= -\frac{1}{2} + 6 \\ &= \frac{11}{2}\end{aligned}$$

Hasil darab punca:

$$\begin{aligned}(\alpha + 3)(\beta + 3) &= \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9 \\ &= -2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \\ &= \frac{11}{2}\end{aligned}$$

Oleh itu, persamaan kuadratik dengan punca-punca $\alpha + 3$ dan $\beta + 3$ ialah

$$\begin{aligned}x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{11}{2} &= 0 \leftarrow \text{Darabkan kedua-dua belah} \\ 2x^2 - 11x + 11 &= 0 \text{ persamaan dengan 2}\end{aligned}$$

(b) Hasil tambah punca:

$$\begin{aligned}2\alpha + 2\beta &= 2(\alpha + \beta) \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -1\end{aligned}$$

Hasil darab punca:

$$\begin{aligned}(2\alpha)(2\beta) &= 4\alpha\beta \\ &= 4(-2) \\ &= -8\end{aligned}$$

Oleh itu, persamaan kuadratik dengan punca-punca 2α dan 2β ialah

$$x^2 - (-1)x - 8 = 0$$

$$x^2 + x - 8 = 0$$

ANSWER

(c) Hasil tambah punca:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2(-2) \\ &= \frac{1}{4} + 4 \\ &= \frac{17}{4}\end{aligned}$$

Hasil darab punca:

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2 &= (\alpha\beta)^2 \\ &= (-2)^2 \\ &= 4\end{aligned}$$

Oleh itu, persamaan kuadratik dengan punca-punca α^2 dan β^2 ialah

$$\begin{aligned}x^2 - \frac{17}{4}x + 4 &= 0 \\ 4x^2 - 17x + 16 &= 0\end{aligned}$$

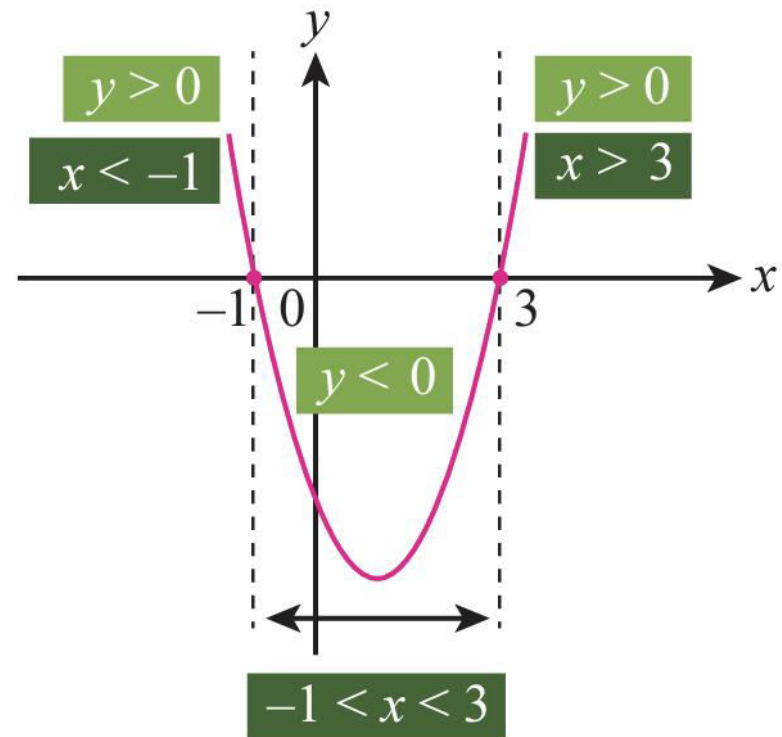
Darabkan kedua-dua belah persamaan dengan 4

Latih Diri 2.2

- Bentukkan persamaan kuadrat yang mempunyai punca-punca berikut.
(a) 2 dan 6 (b) -1 dan 4 (c) -4 dan -7 (d) $\frac{1}{5}$ dan -5
- Persamaan kuadrat $x^2 + (p - 5)x + 2q = 0$ mempunyai punca-punca -3 dan 6 . Cari nilai p dan nilai q .
- Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadrat $5x^2 - 10x - 9 = 0$, bentukkan persamaan kuadrat dengan punca-punca yang berikut.
(a) $\alpha + 2$ dan $\beta + 2$ (b) 5α dan 5β (c) $\alpha - 1$ dan $\beta - 1$ (d) $\frac{\alpha}{3}$ dan $\frac{\beta}{3}$
- Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadrat $2x^2 + 5x = 1$, cari persamaan dengan punca-punca berikut.
(a) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (b) $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right), \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$ (c) α^2, β^2 (d) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$
- Persamaan kuadrat $2x^2 = 6x + 3$ mempunyai punca-punca p dan q . Cari persamaan kuadrat dengan punca-punca p^2q dan pq^2 .

Menyelesaikan
ketaksamaan
kuadrat

Lakaran graf



Garis nombor

Titik ujian -2:

$$(-2 + 1)(-2 - 3) > 0$$

⊕

Titik ujian 0:

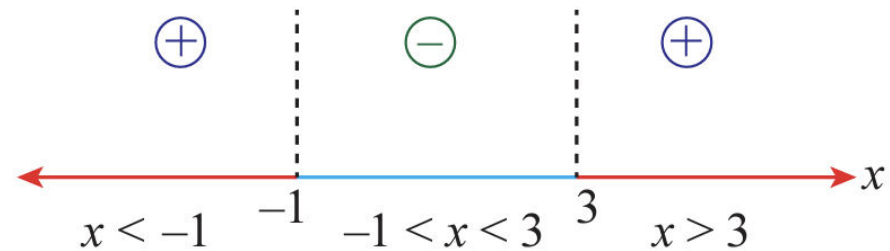
$$(0 + 1)(0 - 3) < 0$$

⊖

Titik ujian 4:

$$(4 + 1)(4 - 3) > 0$$

⊕



Menyelesaikan ketaksamaan kuadratik

Jadual

	Julat nilai x		
	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
$(x + 1)$	-	+	+
$(x - 3)$	-	-	+
$(x + 1)(x - 3)$	+	-	+

Menyelesaikan ketaksamaan kuadratik

Bagi suatu persamaan kuadratik dalam bentuk $(x - a)(x - b) = 0$, dengan $a < b$,

(a) jika $(x - a)(x - b) > 0$, maka $x < a$ atau $x > b$,

(b) jika $(x - a)(x - b) < 0$, maka $a < x < b$.

Menyelesaikan ketaksamaan kuadratik

Contoh 5

Cari julat nilai x bagi ketaksamaan kuadratik $(2x - 1)(x + 4) \geq x + 4$ menggunakan kaedah

- (a) lakaran graf
- (b) garis nombor
- (c) jadual



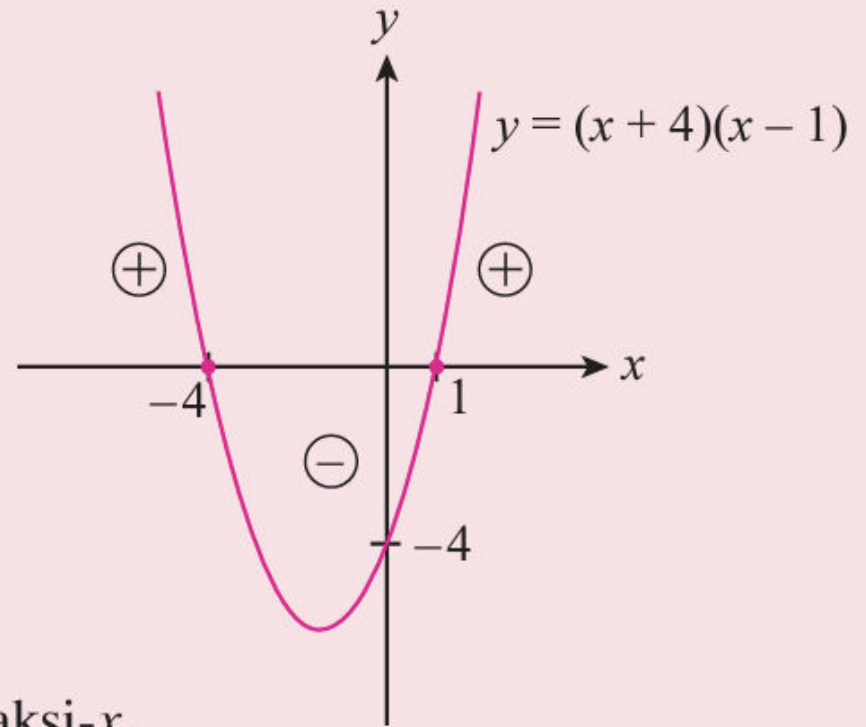
Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & (2x - 1)(x + 4) \geq x + 4 \\ & 2x^2 + 7x - 4 \geq x + 4 \\ & 2x^2 + 6x - 8 \geq 0 \\ & x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ & (x + 4)(x - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Apabila $(x + 4)(x - 1) = 0$, $x = -4$ atau $x = 1$.

Graf akan menyilang paksi- x pada titik $x = -4$ dan $x = 1$.

Oleh sebab $(x + 4)(x - 1) \geq 0$, maka julat nilai x ditentukan pada lengkung graf yang berada di atas paksi- x . Maka, julat nilai x ialah $x \leq -4$ atau $x \geq 1$.



(b) Titik ujian -5 : $(-5 + 4)(-5 - 1) \geq 0$ Titik ujian 0 : $(0 + 4)(0 - 1) \leq 0$ Titik ujian 2 : $(2 + 4)(2 - 1) \geq 0$



Oleh sebab $(x + 4)(x - 1) \geq 0$, maka julat nilai x ditentukan pada bahagian positif garis nombor.

Maka, julat nilai x ialah $x \leq -4$ atau $x \geq 1$.

(c)

	Julat nilai x		
	$x \leq -4$	$-4 \leq x \leq 1$	$x \geq 1$
$(x + 4)$	-	+	+
$(x - 1)$	-	-	+
$(x + 4)(x - 1)$	+	-	+

Oleh sebab $(x + 4)(x - 1) \geq 0$, maka julat nilai x ditentukan pada bahagian positif dalam jadual.

Maka, julat nilai x ialah $x \leq -4$ atau $x \geq 1$.

Latih Diri 2.3

1. Selesaikan setiap ketaksamaan kuadratik yang berikut menggunakan kaedah lakaran graf, garis nombor atau jadual.

(a) $x^2 < 4$

(b) $(2 - x)(8 - x) < 0$

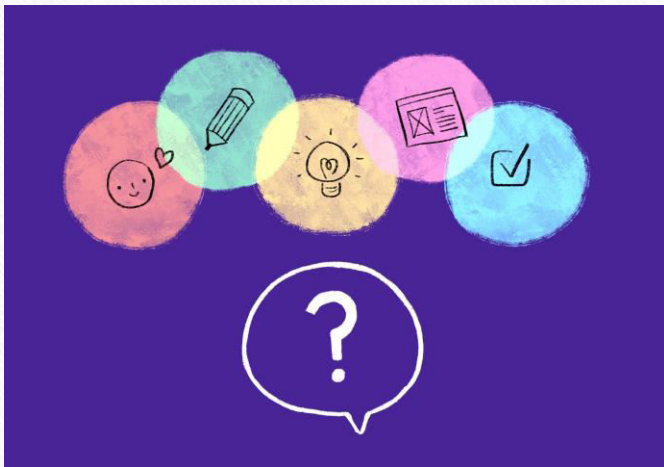
(c) $x^2 \leq 4x + 12$

(d) $x(x - 2) \geq 3$

(e) $(x + 2)^2 < 2x + 7$

(f) $(3x + 1)(5 - x) > 13$

2. Cari julat nilai x bagi $3x^2 - 5x \geq 16 + x(2x + 1)$.



Latihan Intensif 2.1

Imbas kod QR atau layari bit.ly/2SHb06q untuk kuiz



1. Selesaikan persamaan kuadratik $3x(x - 5) = 2x - 1$. Berikan jawapan betul kepada tiga tempat perpuluhan.
2. Diberi persamaan kuadratik $2(x - 5)^2 = 4(x + 7)$,
 - (a) ungkapkan persamaan tersebut dalam bentuk am, iaitu $ax^2 + bx + c = 0$.
 - (b) nyatakan hasil tambah dan hasil darab punca bagi persamaan tersebut.
3. Jika α dan β ialah punca-punca bagi persamaan kuadratik $2x^2 + 6x - 7 = 0$, bentukkan persamaan dengan punca-punca yang berikut.
 - (a) $\frac{1}{2\alpha + 1}, \frac{1}{2\beta + 1}$
 - (b) $\frac{5\alpha}{\beta}, \frac{5\beta}{\alpha}$
 - (c) $\alpha + 3\beta, 3\alpha + \beta$

4. Jika satu punca bagi persamaan $3x^2 + 19x + k = 0$ ialah -7 , cari nilai pemalar k .
5. Diberi persamaan kuadratik $rx^2 + (r - 1)x + 2r + 3 = 0$, dengan r ialah integer bukan sifar, cari nilai r dengan keadaan
 - (a) satu punca adalah negatif punca yang satu lagi,
 - (b) satu punca adalah salingan punca yang satu lagi,
 - (c) satu punca adalah dua kali punca yang satu lagi.
6. Satu punca bagi persamaan $x^2 - 8x + m = 0$ ialah tiga kali punca yang satu lagi, cari nilai pemalar m dan punca-puncanya.
7. Persamaan $x^2 + 2x = k(x - 1)$ mempunyai punca bukan sifar dengan beza antara punca adalah 2, cari nilai setiap punca dan nilai k .
8. Punca-punca persamaan $x^2 + px + 27 = 0$ adalah mengikut nisbah 1 : 3. Cari nilai-nilai p .

9. Diberi 3 dan $h + 1$ ialah punca-punca bagi persamaan $x^2 + (k - 1)x + 9 = 0$, cari nilai-nilai yang mungkin bagi h dan k .
10. Dua punca bagi persamaan $x^2 - 8x + c = 0$ ialah α dan $\alpha + 3d$, ungkapkan c dalam sebutan d .
11. Selesaikan setiap ketaksamaan kuadratik yang berikut.
(a) $2x^2 \geq x + 1$ (b) $(x - 3)^2 \leq 5 - x$ (c) $(1 - x)^2 + 2x < 17$
12. Cari nilai m dan nilai n bagi setiap ketaksamaan kuadratik berikut.
(a) $x^2 + mx < n$ yang hanya dipenuhi oleh $-3 < x < 4$.
(b) $2x^2 + m > nx$ yang hanya dipenuhi oleh $x < -2$ atau $x > 5$.
13. Diberi $y = 2x^2 + bx + 12$ dan $y < 0$ jika $2 < x < a$, cari nilai bagi a dan b .

A photograph of a skateboarder in mid-air, performing a trick on a concrete ramp at a skate park. The skateboarder is wearing a white t-shirt and dark pants. The ramp is light-colored concrete. In the background, there are trees and a blue fence. The text "Jenis-jenis Punca Persamaan Kuadratik" is overlaid in white serif font. A green circular stamp with the word "Journal." is visible on the right side of the ramp.

Jenis-jenis Punca Persamaan Kuadratik

Journal.

1. Jika pembezalayan $b^2 - 4ac > 0$, persamaan mempunyai dua punca nyata dan berbeza.
2. Jika pembezalayan $b^2 - 4ac = 0$, persamaan mempunyai dua punca nyata yang sama.
3. Jika pembezalayan $b^2 - 4ac < 0$, persamaan tidak mempunyai punca nyata.

Jenis-jenis Punca Persamaan Kuadratik

Contoh 6

Tentukan jenis punca bagi setiap persamaan kuadratik berikut.

(a) $x^2 + 5x - 6 = 0$

(b) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$

(c) $2x^2 - 4x + 5 = 0$

Penyelesaian

(a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ dengan $a = 1$, $b = 5$ dan $c = -6$

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4(1)(-6)$$

$$= 49 (> 0)$$

Maka, persamaan $x^2 + 5x - 6 = 0$ mempunyai dua punca nyata dan berbeza.

(b) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ dengan $a = -4$, $b = 4$ dan $c = -1$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 4^2 - 4(-4)(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Maka, persamaan $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ mempunyai dua punca nyata yang sama.

(c) $2x^2 - 4x + 5 = 0$ dengan $a = 2$, $b = -4$ dan $c = 5$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-4)^2 - 4(2)(5) \\ &= -24 (< 0) \end{aligned}$$

Maka, persamaan $2x^2 - 4x + 5 = 0$ tidak mempunyai punca nyata.

Latih Diri 2.4

1. Cari pembezalayan dan tentukan jenis-jenis punca bagi setiap persamaan kuadratik berikut.

(a) $x^2 + 4x + 1 = 0$

(b) $x^2 = 8(x - 2)$

(c) $5x^2 + 4x + 6 = 0$

(d) $-3x^2 + 7x + 5 = 0$

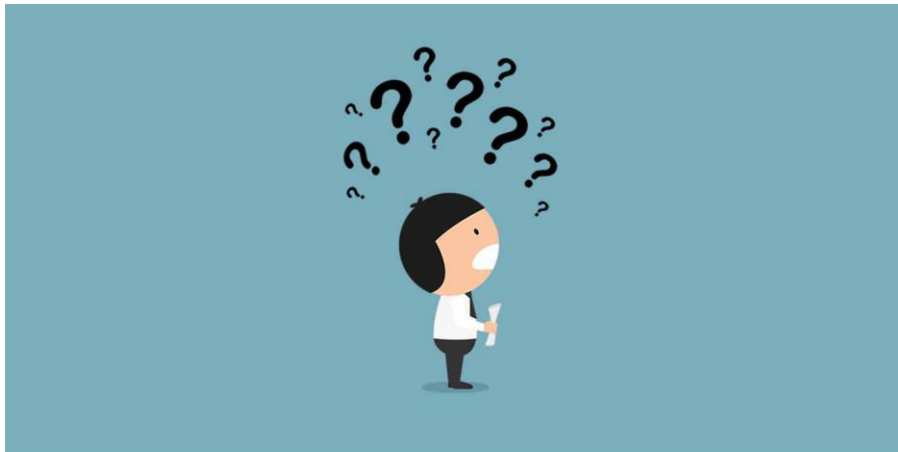
(e) $-x^2 + 10x - 25 = 0$

(f) $(2x - 1)(x + 3) = 0$



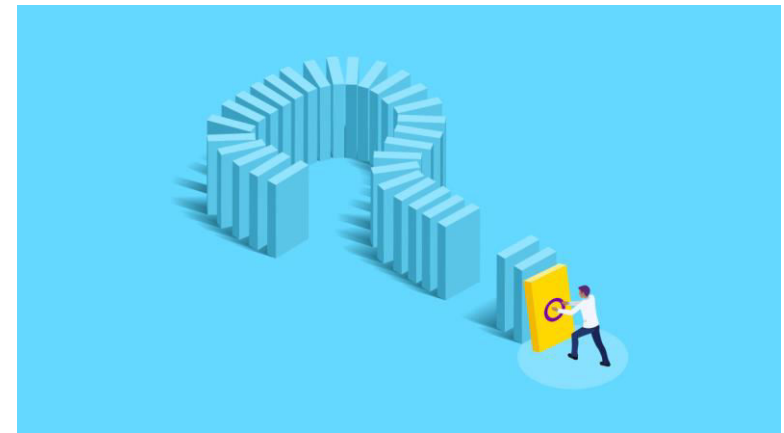
Contoh 7

- (a) Persamaan kuadrat $x^2 + k + 3 = kx$, dengan k ialah pemalar, mempunyai dua punca nyata yang sama. Cari nilai-nilai yang mungkin bagi k .
- (b) Punca-punca persamaan $(p + 2)x^2 - 2px = 3 - p$, dengan p ialah pemalar adalah nyata dan berbeza. Cari julat nilai p .
- (c) Diberi persamaan kuadrat $x^2 + 4x + 13 = m(2 - x)$, dengan m ialah pemalar, tidak mempunyai punca nyata, cari julat nilai m .



Contoh 7

- (a) Persamaan kuadratik $x^2 + k + 3 = kx$, dengan k ialah pemalar, mempunyai dua punca nyata yang sama. Cari nilai-nilai yang mungkin bagi k .
- (b) Punca-punca persamaan $(p + 2)x^2 - 2px = 3 - p$, dengan p ialah pemalar adalah nyata dan berbeza. Cari julat nilai p .
- (c) Diberi persamaan kuadratik $x^2 + 4x + 13 = m(2 - x)$, dengan m ialah pemalar, tidak mempunyai punca nyata, cari julat nilai m .



Penyelesaian

$$(a) \quad x^2 + k + 3 = kx$$

$$x^2 - kx + k + 3 = 0$$

$$a = 1, b = -k \text{ dan } c = k + 3$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-k)^2 - 4(1)(k + 3) = 0$$

$$k^2 - 4k - 12 = 0$$

$$(k + 2)(k - 6) = 0$$

$$k = -2 \quad \text{atau} \quad k = 6$$

Susun semula persamaan dalam bentuk am

Dua punca nyata yang sama

$$(b) \quad (p + 2)x^2 - 2px = 3 - p$$

$$(p + 2)x^2 - 2px + p - 3 = 0 \leftarrow$$

$$a = p + 2, b = -2p \text{ dan } c = p - 3$$

$$b^2 - 4ac > 0 \leftarrow$$

$$(-2p)^2 - 4(p + 2)(p - 3) > 0$$

$$4p^2 - 4(p^2 - p - 6) > 0$$

$$4p + 24 > 0$$

$$p > -6$$

Susun semula persamaan dalam bentuk am

Dua punca nyata dan berbeza

$$(c) \quad x^2 + 4x + 13 = m(2 - x)$$

$$x^2 + 4x + 13 = 2m - mx$$

$$x^2 + 4x + mx + 13 - 2m = 0$$

$$x^2 + (4 + m)x + 13 - 2m = 0$$

$$a = 1, b = 4 + m \text{ dan } c = 13 - 2m$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$(4 + m)^2 - 4(1)(13 - 2m) < 0$$

$$16 + 8m + m^2 - 52 + 8m < 0$$

$$m^2 + 16m - 36 < 0$$

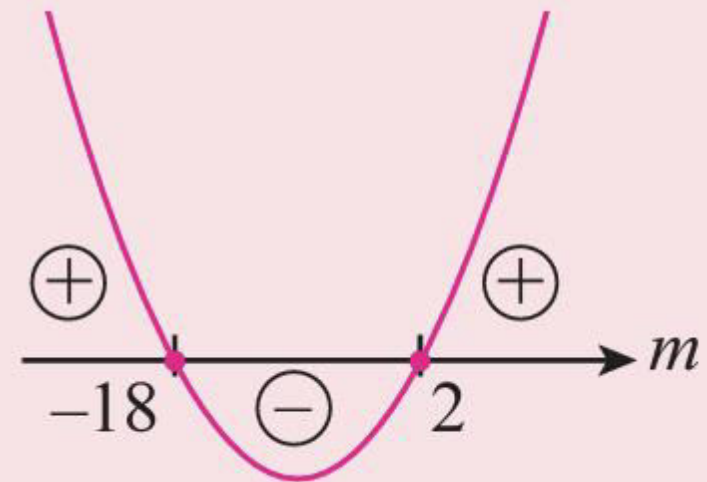
$$(m + 18)(m - 2) < 0$$

Maka, julat nilai m ialah

$$-18 < m < 2.$$

Susun semula persamaan dalam bentuk am

Tidak mempunyai punca nyata



Contoh 8

Diberi persamaan $x^2 - 4ax + 5b = 0$ mempunyai dua punca nyata yang sama, ungkapkan a dalam sebutan b .

Penyelesaian

$x^2 - 4ax + 5b = 0$ dengan $a = 1$, $b = -4a$ dan $c = 5b$.

Oleh sebab persamaan mempunyai dua punca nyata yang sama,

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-4a)^2 - 4(1)(5b) = 0$$

$$16a^2 - 20b = 0$$

$$16a^2 = 20b$$

$$a^2 = \frac{5}{4}b$$

$$a = \pm \frac{1}{2} \sqrt{5b}$$

Latih Diri 2.5

1. Cari nilai-nilai atau julat nilai p dengan keadaan persamaan
 - (a) $9x^2 + p + 1 = 4px$ mempunyai dua punca yang sama,
 - (b) $x^2 + (2x + 3)x = p$ mempunyai dua punca nyata dan berbeza,
 - (c) $x^2 + 2px + (p - 1)(p - 3) = 0$ tidak mempunyai punca nyata.
2. Cari julat nilai k jika persamaan $x^2 + k = kx - 3$ mempunyai dua punca nyata dan berbeza. Nyatakan nilai-nilai k jika persamaan itu mempunyai dua punca nyata yang sama.
3. Persamaan kuadratik $x^2 + hx + k = 0$ mempunyai punca-punca -2 dan 6 , cari
 - (a) nilai h dan nilai k ,
 - (b) julat nilai c dengan keadaan persamaan $x^2 + hx + k = c$ tidak mempunyai punca nyata.
4. Persamaan $hx^2 + 3hx + h + k = 0$, dengan $h \neq 0$, mempunyai dua punca nyata yang sama. Ungkapkan k dalam sebutan h .
5. Diberi bahawa persamaan kuadratik $ax^2 - 5bx + 4a = 0$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar mempunyai dua punca nyata yang sama, cari nisbah $a : b$.

Latihan Intensif 2.2

Imbas kod QR atau layari bit.ly/2Z8bFQG untuk kuiz



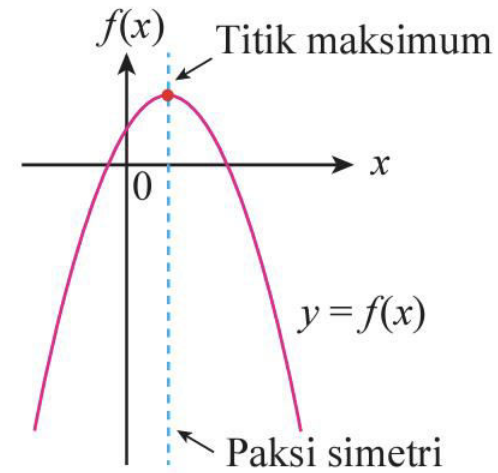
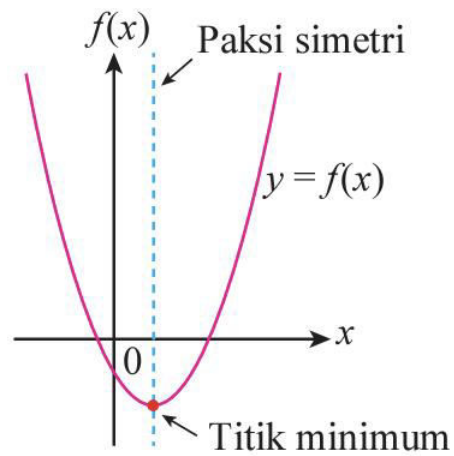
1. Tentukan jenis punca bagi persamaan kuadratik berikut.
(a) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (b) $(x - 2)^2 = 3$ (c) $2x^2 + x + 4 = 0$
2. Persamaan kuadratik berikut mempunyai dua punca nyata yang sama. Cari nilai-nilai k .
(a) $x^2 + kx = 2x - 9$ (b) $kx^2 + (2k + 1)x + k - 1 = 0$
3. Persamaan kuadratik berikut mempunyai dua punca nyata dan berbeza. Cari julat nilai r .
(a) $x(x + 1) = rx - 4$ (b) $x^2 + x = 2rx - r^2$
4. Cari julat nilai p jika persamaan berikut tidak mempunyai punca nyata.
(a) $(1 - p)x^2 + 5 = 2x$ (b) $4px^2 + (4p + 1)x + p - 1 = 0$
5. Persamaan kuadratik $kx^2 - 10x + 6k = 5$ dengan k ialah pemalar, mempunyai dua punca nyata yang sama.
(a) Cari nilai-nilai k .
(b) Seterusnya, cari punca bagi persamaan tersebut dengan menggunakan nilai terkecil k yang diperolehi di (a).

6. Persamaan kuadratik $x(x - 4) + 2n = m$ dengan m dan n ialah pemalar, mempunyai dua punca nyata yang sama. Ungkapkan m dalam sebutan n .
7. Persamaan kuadratik $x^2 + bx + c = 0$ dengan b dan c ialah integer positif, mempunyai pembezaan 16 dan $b - c = -4$. Cari
- nilai-nilai yang mungkin bagi b dan c ,
 - punca-punca yang sepadan bagi persamaan tersebut.
8. Persamaan kuadratik $2x^2 - 5x + c = 0$ dengan c ialah integer positif, tidak mempunyai punca nyata.
- Cari dua nilai yang mungkin, c_1 dan c_2 bagi c .
 - Berdasarkan nilai c_1 dan c_2 di (a), adakah persamaan $2x^2 - 5x + \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = 0$ mempunyai dua punca nyata? Terangkan.

A photograph of a skateboarder in mid-air, performing a trick on a concrete ramp at a skate park. The skateboarder is wearing a white long-sleeved shirt and dark pants. The ramp is light-colored concrete. In the background, there are trees and a blue fence. The text "Fungsi Kuadratik" is overlaid in white serif font, with a horizontal line underneath it. A green circular logo with the word "Journal." is visible on the right side of the ramp.

Fungsi Kuadratik

Journal.



Menganalisis kesan perubahan a , b dan c terhadap bentuk dan kedudukan graf $f(x) = ax^2 + bx + c$

**Hanya
nilai a
berubah**

- Perubahan nilai a memberi kesan kepada bentuk dan kelebaran graf namun pintasan-y tetap sama.
- Apabila $a > 0$, graf berbentuk \cup yang melalui titik minimum dan apabila $a < 0$, graf berbentuk \wedge yang melalui titik maksimum.
- Untuk graf $a > 0$, misalnya $a = 1$, apabila nilai a semakin besar daripada 1, kelebaran graf semakin berkurang. Sebaliknya apabila nilai a semakin kecil daripada 1 menghampiri 0, kelebaran graf semakin bertambah.
- Untuk graf $a < 0$, misalnya $a = -1$, apabila nilai a semakin kecil daripada -1 , kelebaran graf semakin berkurang. Sebaliknya apabila nilai a semakin besar daripada -1 menghampiri 0, kelebaran graf semakin bertambah.

Perubahan bentuk dan kedudukan graf fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$

Hanya nilai b berubah	<ul style="list-style-type: none"> • Perubahan nilai b hanya memberi kesan kepada kedudukan verteks terhadap paksi-y namun bentuk graf dan pintasan-y tidak berubah. • Apabila $b = 0$, verteks berada pada paksi-y. • Untuk graf $a > 0$, apabila $b > 0$, verteks berada di sebelah kiri paksi-y dan apabila $b < 0$, verteks berada di sebelah kanan paksi-y. • Untuk graf $a < 0$, apabila $b > 0$, verteks berada di sebelah kanan paksi-y dan apabila $b < 0$, verteks berada di sebelah kiri paksi-y.
Hanya nilai c berubah	<ul style="list-style-type: none"> • Perubahan nilai c hanya memberi kesan kepada kedudukan graf secara menegak sama ada ke atas atau ke bawah. • Bentuk graf tidak berubah.

Perubahan bentuk dan kedudukan graf fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$

Contoh 9

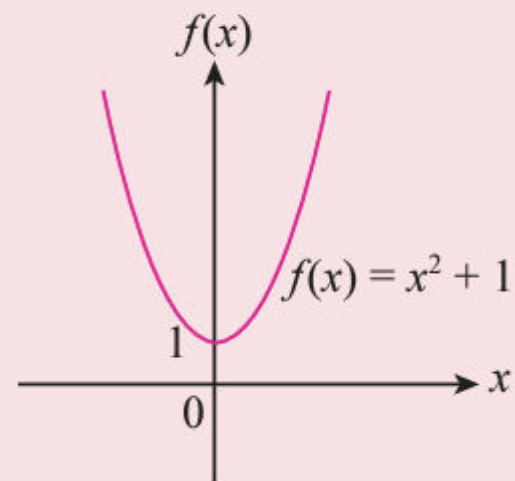
Rajah menunjukkan lakaran graf bagi $f(x) = x^2 + 1$ dengan $a = 1$, $b = 0$ dan $c = 1$. Buat analisis dan lakukan generalisasi pada bentuk dan kedudukan graf itu apabila nilai-nilai berikut berubah. Seterusnya, lakarkan graf.

(a) Nilai a menjadi

(i) 2,

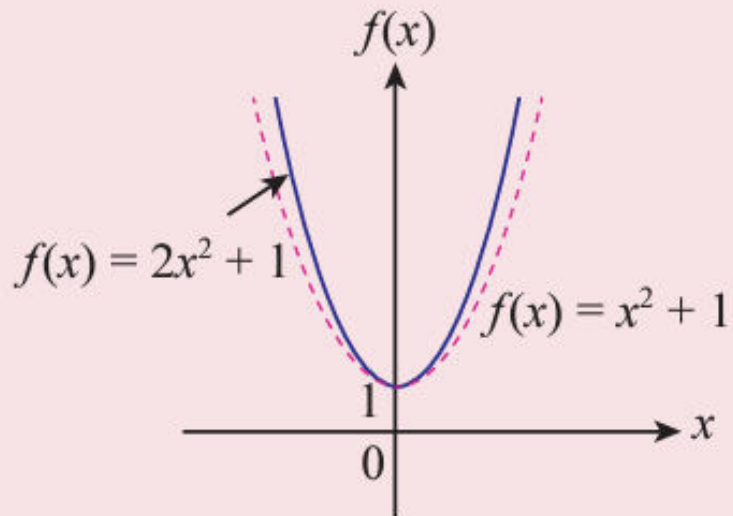
(ii) $\frac{1}{2}$.

(b) Nilai c menjadi 3.

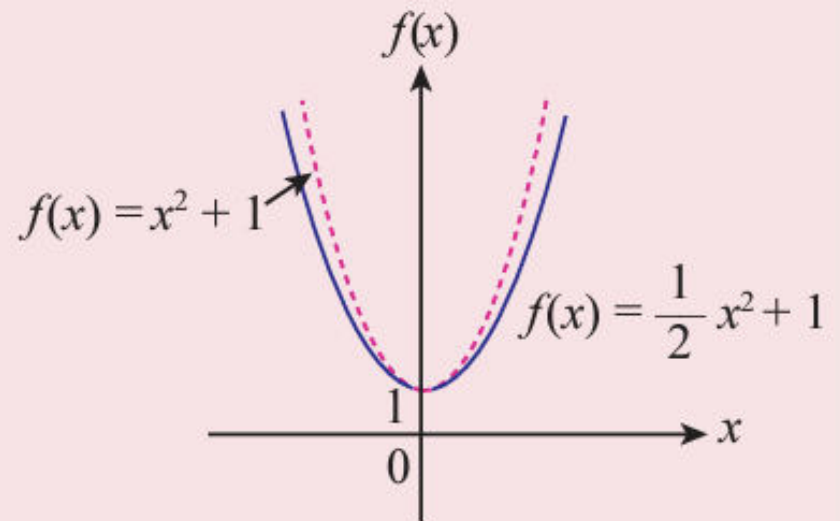


Penyelesaian

- (a) (i) Apabila a berubah daripada 1 ke 2, kelebaran graf semakin berkurang. Pintasan- y tidak berubah dan verteks berada pada paksi- y .



- (ii) Apabila a berubah daripada 1 ke $\frac{1}{2}$, kelebaran graf semakin bertambah. Pintasan- y tidak berubah dan verteks berada pada paksi- y .





Latih Diri 2.6

1. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $f(x) = -x^2 + x + 6$, dengan $a = -1$, $b = 1$ dan $c = 6$. Lakarkan graf $f(x)$ yang terbentuk apabila nilai berikut berubah.

(a) Nilai a berubah kepada

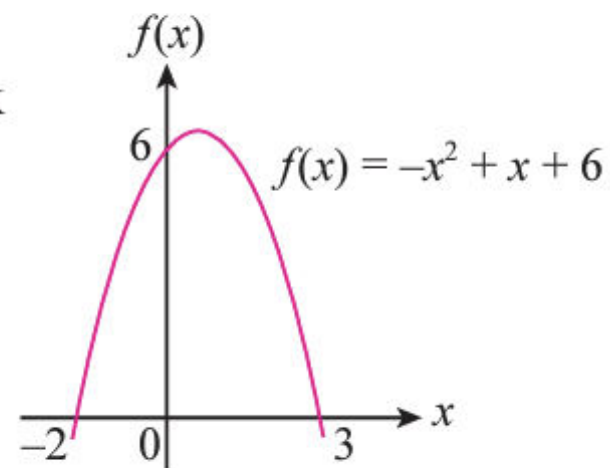
(i) -3

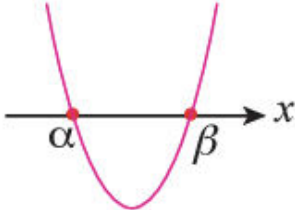
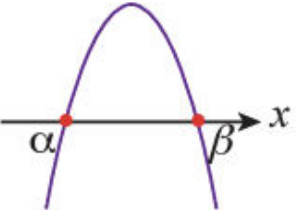
(ii) $-\frac{1}{4}$,

(b) nilai b berubah kepada -1 ,

(c) nilai c berubah kepada -2 .

Buat generalisasi daripada perubahan bentuk dan kedudukan graf yang diperoleh.

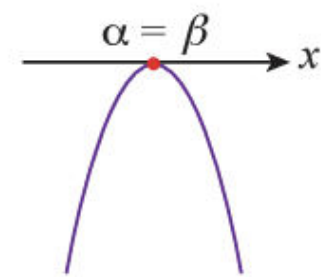
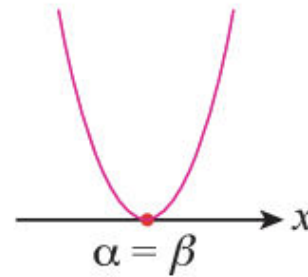


Pembedalayan, $b^2 - 4ac$	Jenis punca dan kedudukan graf	Kedudukan graf fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$	
		$a > 0$	$a < 0$
$b^2 - 4ac > 0$	<ul style="list-style-type: none"> • Dua punca nyata dan berbeza • Graf menyalang paksi-x pada dua titik yang berbeza. 		

Menghubungkan kedudukan graf fungsi kuadratik dengan jenis punca

$$b^2 - 4ac = 0$$

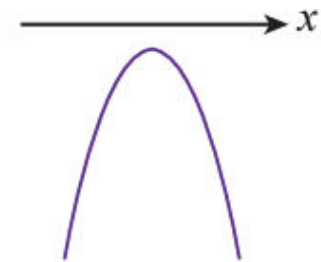
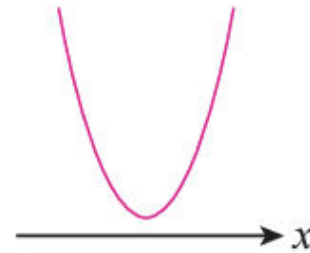
- Dua punca nyata yang sama
- Graf menyentuh paksi- x pada satu titik sahaja.



Menghubungkan kedudukan graf fungsi kuadratik dengan jenis punca

$$b^2 - 4ac < 0$$

- Tiada punca nyata
- Graf tidak menyalang pada mana-mana titik pada paksi- x .



Menghubungkan kedudukan graf fungsi kuadratik dengan jenis punca

Contoh 10

Tentukan jenis punca bagi setiap fungsi kuadratik berikut apabila $f(x) = 0$. Kemudian, lakarkan graf dan buat satu generalisasi tentang kedudukan graf itu pada paksi- x .

(a) $f(x) = 2x^2 + x - 5$

(b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

Penyelesaian

(a) $f(x) = 2x^2 + x - 5$

$$a = 2, b = 1, c = -5$$

$$b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-5)$$

$$= 41 (> 0)$$

Fungsi kuadratik mempunyai dua punca nyata dan berbeza. Oleh sebab $a > 0$, maka graf $f(x)$ ialah satu parabola yang melalui titik minimum dan menyilang paksi- x pada dua titik.

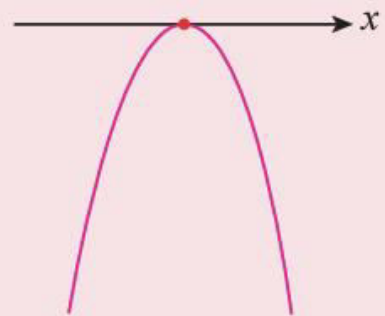
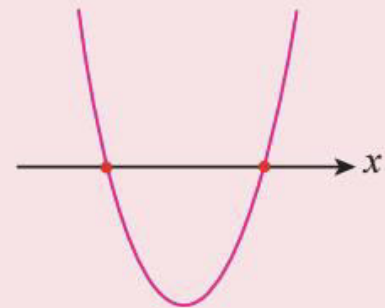
(b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

$$a = -1, b = 2, c = -1$$

$$b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-1)$$

$$= 0$$

Fungsi kuadratik mempunyai dua punca nyata yang sama. Oleh sebab $a < 0$, maka graf $f(x)$ ialah satu parabola yang melalui titik maksimum dan menyentuh paksi- x pada satu titik.



Contoh 11

- (a) Cari nilai-nilai m , dengan keadaan paksi- x ialah tangen kepada graf fungsi kuadratik $f(x) = (m + 1)x^2 + 4(m - 2)x + 2m$.
- (b) Cari julat nilai k jika graf fungsi kuadratik $f(x) = 2x^2 + 5x + 3 - k$ tiada pintasan- x .
- (c) Cari julat nilai p jika graf fungsi kuadratik $f(x) = x^2 + px + p + 3$ mempunyai dua pintasan- x .



Penyelesaian

- (a) Graf fungsi kuadrat $f(x) = (m + 1)x^2 + 4(m - 2)x + 2m$ dengan keadaan paksi- x ialah tangen bermaksud fungsi tersebut mempunyai dua punca nyata yang sama.

Untuk dua punca nyata yang sama:

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(4m - 8)^2 - 4(m + 1)(2m) = 0$$

$$16m^2 - 64m + 64 - 8m^2 - 8m = 0$$

$$8m^2 - 72m + 64 = 0$$

$$m^2 - 9m + 8 = 0$$

$$(m - 1)(m - 8) = 0$$

$$m = 1 \text{ atau } m = 8$$

(b) Graf fungsi kuadratik $f(x) = 2x^2 + 5x + 3 - k$ tiada pintasan- x bermaksud fungsi tersebut tidak mempunyai punca nyata.

Untuk tiada punca nyata:

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$5^2 - 4(2)(3 - k) < 0$$

$$25 - 24 + 8k < 0$$

$$1 + 8k < 0$$

$$8k < -1$$

$$k < -\frac{1}{8}$$

(c) Graf fungsi kuadratik $f(x) = x^2 + px + p + 3$ mempunyai dua pintasan- x bermaksud fungsi tersebut mempunyai dua punca nyata yang berbeza.

Untuk dua punca nyata yang berbeza:

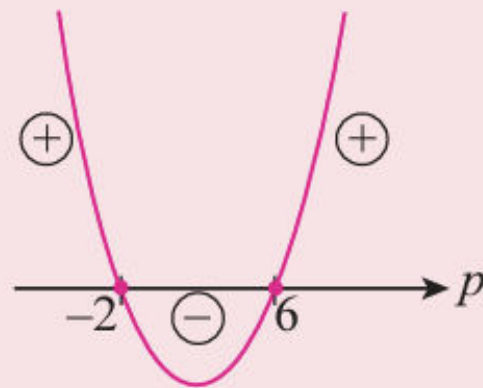
$$b^2 - 4ac > 0$$

$$p^2 - 4(1)(p + 3) > 0$$

$$p^2 - 4p - 12 > 0$$

$$(p + 2)(p - 6) > 0$$

$$p < -2 \quad \text{atau} \quad p > 6$$



Latih Diri 2.7

1. Tentukan jenis punca bagi setiap fungsi kuadratik berikut. Lakarkan graf dan buat generalisasi tentang kedudukan graf pada paksi- x .

(a) $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$

(b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

(c) $f(x) = 4x^2 - 8x + 5$

2. Cari nilai-nilai h yang mungkin jika graf bagi fungsi kuadratik berikut menyentuh paksi- x pada satu titik sahaja.

(a) $f(x) = x^2 - 2hx + 2 + h$

(b) $f(x) = x^2 - (h + 3)x + 3h + 1$

3. Cari julat nilai q jika graf bagi fungsi kuadratik berikut menyilang paksi- x pada dua titik.

(a) $f(x) = 5x^2 - (qx + 4)x - 2$

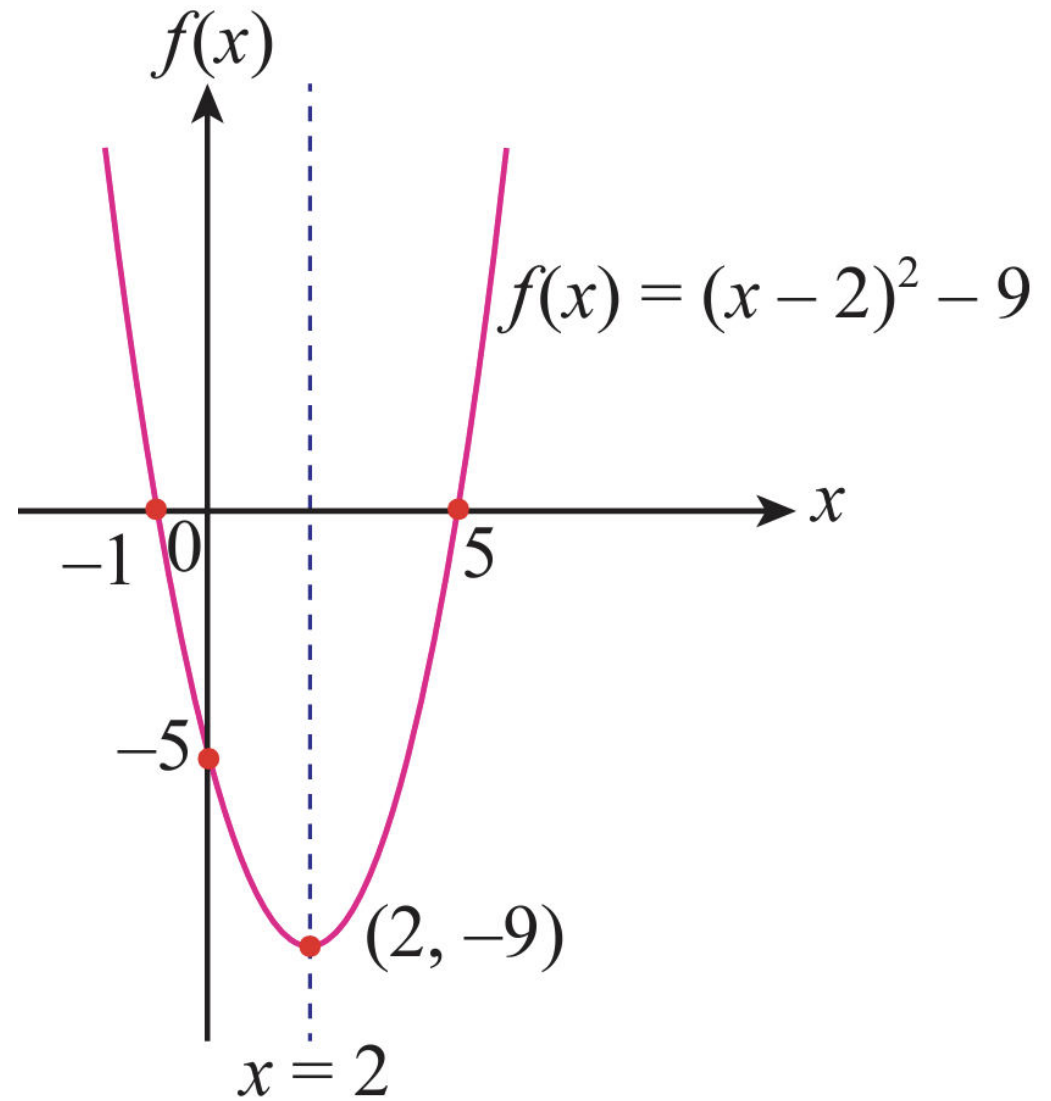
(b) $f(x) = (q + 2)x^2 + q(1 - 2x) - 5$

4. Cari julat nilai r jika graf bagi fungsi kuadratik berikut tidak menyilang paksi- x .

(a) $f(x) = rx^2 + 4x - 6$

(b) $f(x) = rx^2 + (2r + 4)x + r + 7$

Bentuk
verteks

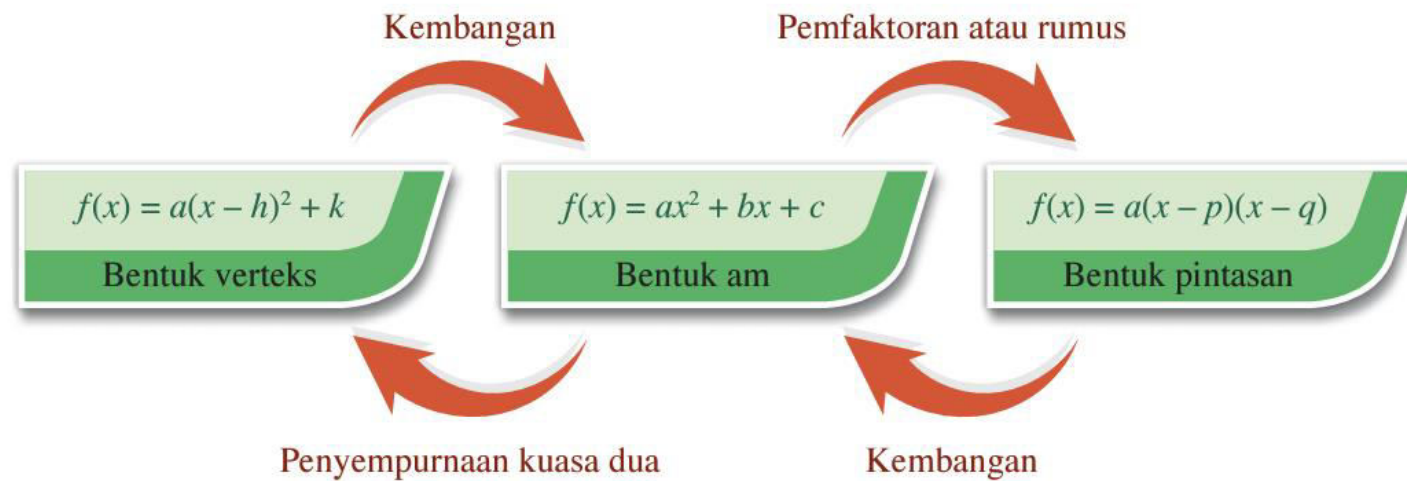


Bentuk fungsi kuadrat

- **Bentuk am**, $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan keadaan a , b dan c ialah pemalar yang mempunyai verteks pada titik $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ dan bersimetri pada garis $x = -\frac{b}{2a}$.

- **Bentuk pintasan**, $f(x) = a(x - p)(x - q)$, dengan keadaan a , p dan q ialah pemalar. p dan q ialah punca-punca atau pintasan- x bagi $f(x)$, verteksnya pada titik $\left(\frac{p + q}{2}, f\left(\frac{p + q}{2}\right)\right)$ dan bersimetri pada garis $x = \frac{p + q}{2}$.

Bentuk fungsi kuadrat



Membuat perkaitan antara bentuk verteks fungsi kuadratik, $f(x) = a(x - h)^2 + k$ dengan bentuk fungsi kuadratik yang lain

Contoh 12

Ungkapkan fungsi kuadrat, $f(x) = 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ dalam bentuk pintasan, $f(x) = a(x - p)(x - q)$, dengan keadaan a , p dan q ialah pemalar dan $p < q$. Seterusnya, nyatakan nilai-nilai a , p dan q .

Penyelesaian

Tukarkan bentuk verteks fungsi kuadrat kepada bentuk am terlebih dahulu sebelum melakukan pemfaktoran.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \\ &= 2\left(x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{81}{16}\right) - \frac{1}{8} \\ &= 2x^2 + 9x + 10 \leftarrow \text{Bentuk am} \\ &= (2x + 5)(x + 2) \end{aligned}$$

$$= 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x + 2) \leftarrow \text{Bentuk pintasan}$$

Oleh itu, fungsi kuadrat dalam bentuk pintasan bagi

$$f(x) = 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \text{ boleh diungkapkan sebagai}$$

$$f(x) = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x + 2), \text{ dengan } a = 2, p = -\frac{5}{2} \text{ dan } q = -2.$$





Contoh 13

Ungkapkan $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ sebagai $f(x) = a(x - h)^2 + k$ dengan keadaan a , h dan k ialah pemalar. Seterusnya, tentukan nilai-nilai a , h dan k .

Penyelesaian

$$f(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

Pastikan pekali bagi x^2 ialah 1 sebelum melengkapkan kuasa dua sempurna.

$$f(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

$$= -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) \leftarrow \text{Faktorkan } -3 \text{ daripada } -3x^2 + 2x + 1$$

$$= -3\left[x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right] \leftarrow \text{Tambah dan tolak } \left(\frac{\text{pekali } x}{2}\right)^2$$

$$= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right]$$

$$= -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right]$$

$$= -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$

Maka, $a = -3$, $h = \frac{1}{3}$ dan $k = \frac{4}{3}$.

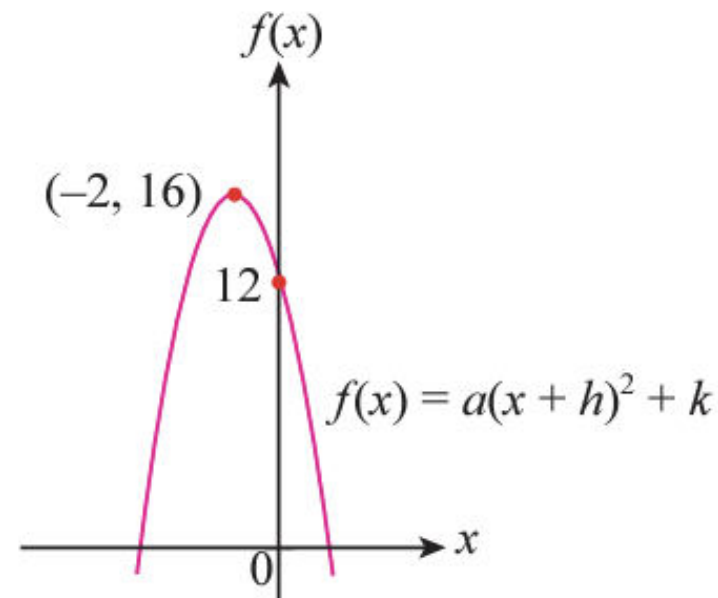
Latih Diri 2.8

1. Diberi $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8 = a(x - p)(x - q)$ untuk semua nilai x , cari nilai pemalar a , p dan q dengan $p < q$.
2. Ungkapkan setiap bentuk verteks berikut kepada bentuk am dan bentuk pintasan.
(a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ (b) $f(x) = 9 - (2x - 1)^2$ (c) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 18$
3. Cari verteks bagi fungsi $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 4)^2 - 5$ dan tukarkannya kepada bentuk am.



4. Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi kuadratik $f(x) = a(x + h)^2 + k$, dengan keadaan a , h dan k ialah pemalar. Diberi $(-2, 16)$ ialah titik maksimum graf itu.

- (a) Nyatakan nilai-nilai a , h dan k .
- (b) Seterusnya, ungkapkan fungsi itu dalam bentuk am, $f(x) = ax^2 + bx + c$ dan bentuk pintasan, $f(x) = a(x - p)(x - q)$.



5. Ungkapkan setiap yang berikut dalam bentuk verteks, $f(x) = a(x - h)^2 + k$, dengan keadaan a , h dan k ialah pemalar.

(a) $f(x) = x^2 - x - 6$

(b) $f(x) = -x^2 - 2x + 4$

(c) $f(x) = -2x^2 - x + 6$

(d) $f(x) = 3x^2 - 2x - 9$

(e) $f(x) = (x + 2)(6 - x)$

(f) $f(x) = 2(x + 4)(x - 2)$

Perubahan bentuk dan kedudukan graf fungsi $f(x) = a(x - h)^2 + k$	
Hanya nilai a berubah	<ul style="list-style-type: none"> • Perubahan nilai a memberi kesan kepada bentuk dan kelebaran graf. • Apabila $a > 0$, graf berbentuk \cup yang melalui titik minimum dan apabila $a < 0$, graf berbentuk \wedge yang melalui titik maksimum. • Untuk graf $a > 0$, misalnya $a = 2$, apabila nilai a semakin besar daripada 2, kelebaran graf semakin berkurang. Sebaliknya apabila nilai a semakin kecil daripada 2 menghampiri 0, kelebaran graf semakin bertambah. • Untuk graf $a < 0$, misalnya $a = -2$, apabila nilai a semakin kecil daripada -2, kelebaran graf semakin berkurang. Sebaliknya apabila nilai a semakin besar daripada -2 menghampiri 0, kelebaran graf semakin bertambah. • Paksi simetri dan nilai minimum atau maksimum tidak berubah.

Perubahan bentuk dan kedudukan graf fungsi $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Hanya nilai h berubah

- Perubahan nilai h hanya menunjukkan pergerakan mengufuk graf.
- Apabila nilai h bertambah, graf akan bergerak ke kanan manakala apabila nilai h berkurang, graf akan bergerak ke kiri.
- Kedudukan paksi simetri berubah tetapi nilai minimum atau nilai maksimum tidak berubah.

Hanya nilai k berubah

- Perubahan nilai k hanya menunjukkan pergerakan menegak graf.
- Apabila nilai k bertambah, graf akan bergerak ke atas manakala apabila nilai k berkurang, graf akan bergerak ke bawah.
- Nilai minimum atau maksimum berubah tetapi paksi simetri tidak berubah.

Perubahan bentuk dan kedudukan graf fungsi $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Contoh 14

Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $f(x) = 2(x + 2)^2 + 3$, dengan keadaan $a = 2$, $h = -2$ dan $k = 3$. Buat generalisasi tentang kesan perubahan setiap nilai berikut terhadap bentuk dan kedudukan graf.

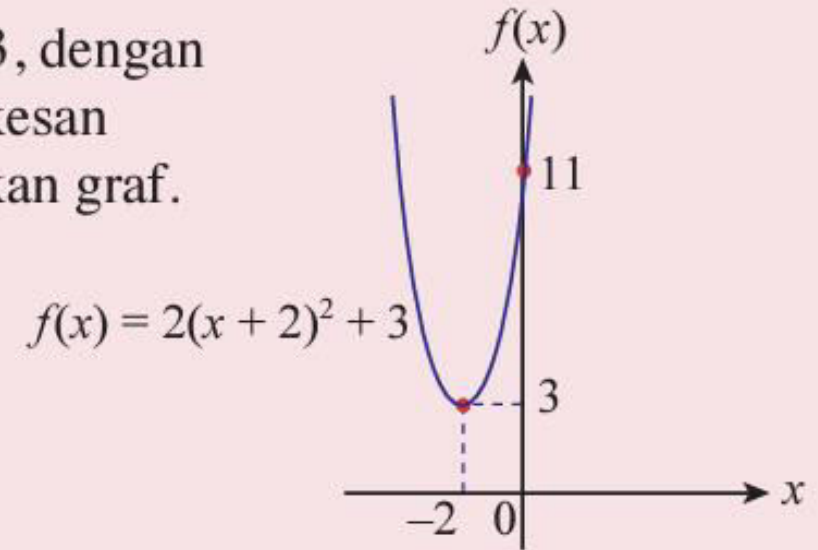
(a) Nilai a berubah kepada

(i) 6,

(ii) $\frac{1}{2}$.

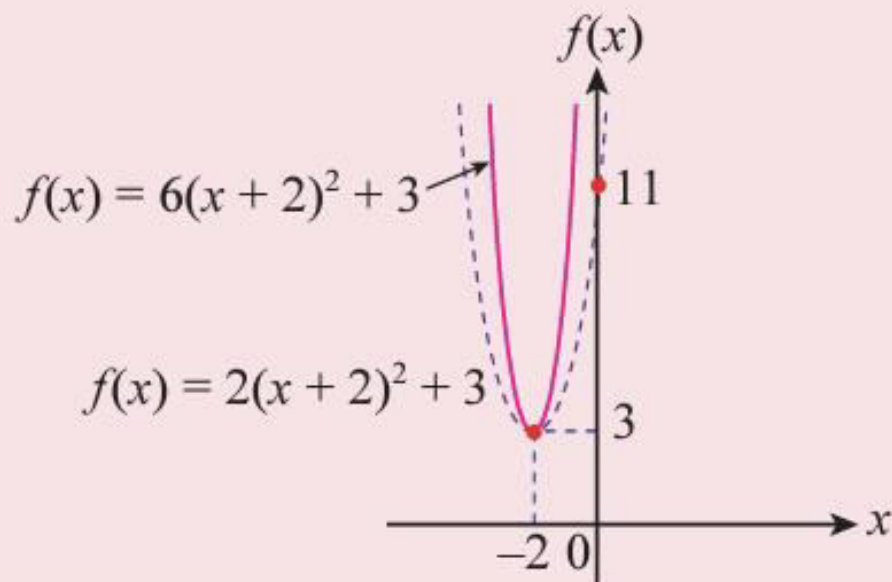
(b) Nilai h berubah kepada -6 .

(c) Nilai k berubah kepada 8.

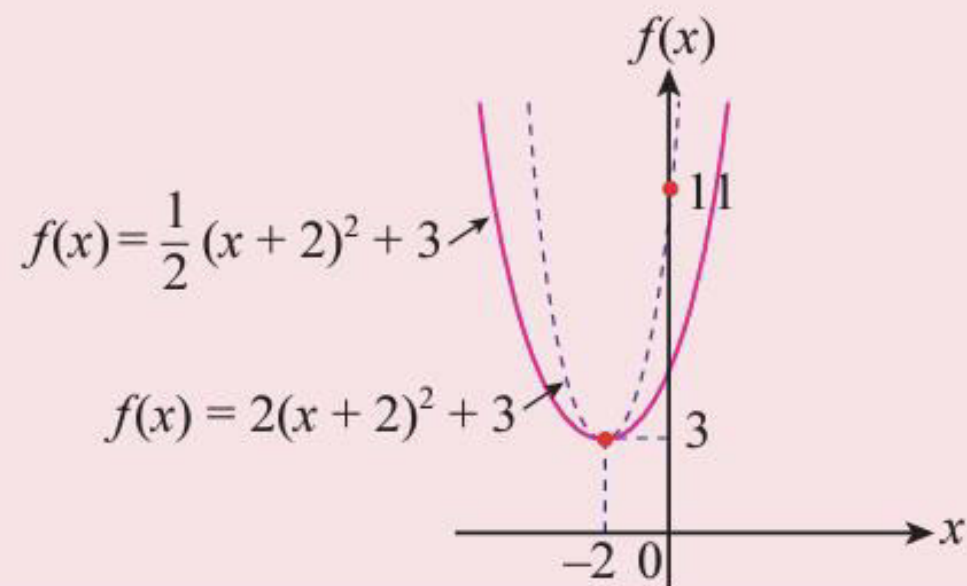


Penyelesaian

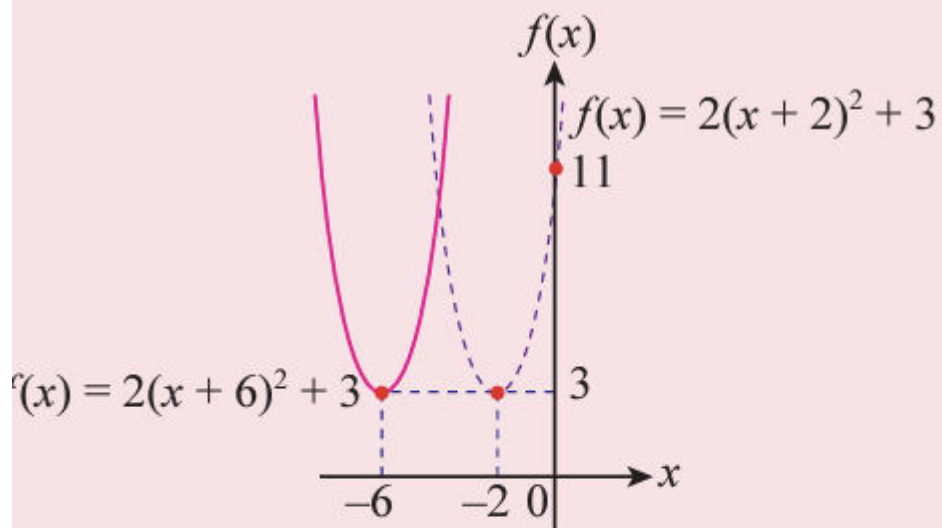
- (a) (i) Apabila a berubah dari 2 ke 6, kelebaran graf berkurang. Paksi simetri dan nilai minimum graf tidak berubah.



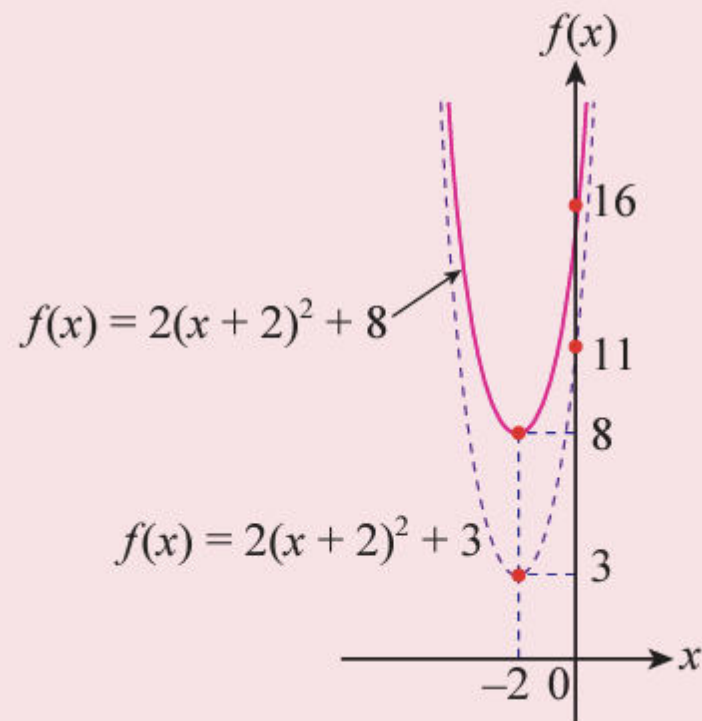
- (ii) Apabila a berubah dari 2 ke $\frac{1}{2}$, kelebaran graf bertambah. Paksi simetri dan nilai minimum graf tidak berubah.



- (b) Apabila h berubah dari -2 ke -6 , graf dengan bentuk yang sama bergerak secara mengufuk 4 unit ke kiri. Persamaan paksi simetrinya menjadi $x = -6$ dan nilai minimumnya tidak berubah, iaitu 3.



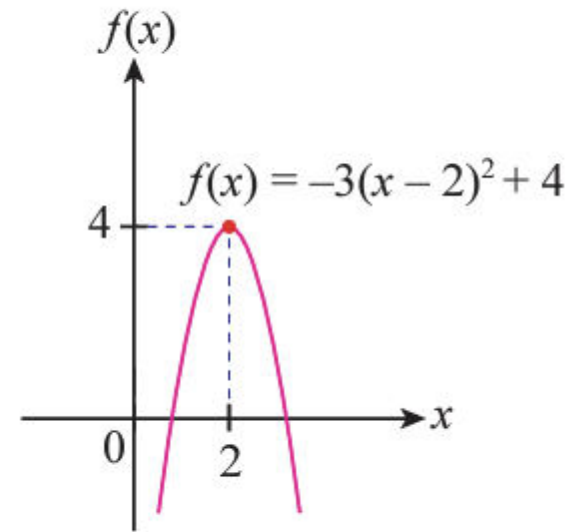
- (c) Apabila k berubah dari 3 ke 8, graf dengan bentuk yang sama bergerak secara menegak 5 unit ke atas. Nilai minimumnya menjadi 8 dan persamaan paksi simetrinya masih sama, iaitu $x = -2$.





Latih Diri 2.9

1. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $f(x) = -3(x - 2)^2 + 4$ dengan $a = -3$, $h = 2$ dan $k = 4$.
 - (a) Tentukan koordinat bagi titik maksimum dan persamaan paksi simetri.
 - (b) Buat generalisasi terhadap bentuk dan kedudukan graf apabila nilai-nilai berikut berubah. Seterusnya, lakarkan graf.
 - (i) Nilai a berubah kepada -10 .
 - (ii) Nilai h berubah kepada 5 .
 - (iii) Nilai k berubah kepada -2 .

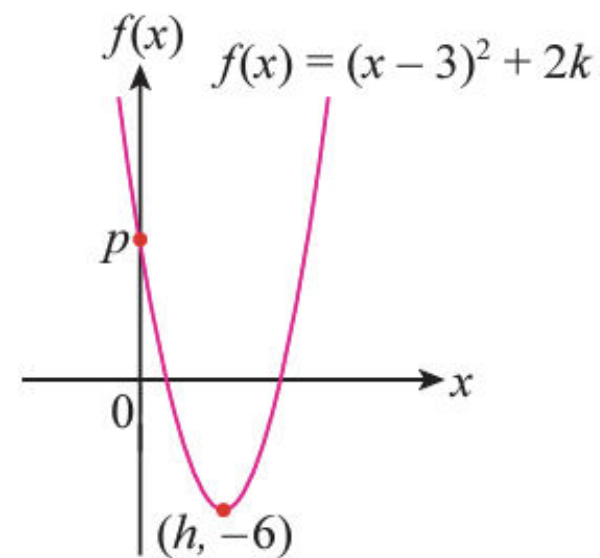


2. Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi $f(x) = (x - 3)^2 + 2k$, dengan keadaan k ialah pemalar. Diberi $(h, -6)$ ialah titik minimum graf itu.

(a) Nyatakan nilai-nilai h , k dan p .

(b) Jika graf itu bergerak 2 unit ke kanan, tentukan persamaan paksi simetri bagi lengkung itu.

(c) Jika graf itu bergerak 5 unit ke atas, tentukan nilai minimumnya.



3. Bandingkan graf bagi setiap fungsi kuadratik berikut kepada graf $f(x) = x^2$ dengan koordinat verteks ialah $(0, 0)$.

(a) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 6)^2$

(b) $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$

(c) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2 - 4$

Melakar graf fungsi kuadrat

Kenal pasti nilai a untuk menentukan bentuk graf fungsi kuadrat.

Cari nilai pembezaan, $b^2 - 4ac$ untuk menentukan kedudukan graf.

Tentukan verteks.

Plotkan titik-titik yang diperoleh pada satah Cartes dan lukis satu parabola licin bersimetri pada garis mencancang yang melalui verteks graf.

Cari nilai $f(0)$ untuk menentukan pintasan- y .

Tentukan titik persilangan pada paksi- x dengan menyelesaikan persamaan fungsi kuadrat $f(x) = 0$.

Contoh 15

Lakarkan graf bagi fungsi kuadratik $f(x) = -x^2 + 4x + 12$.

Penyelesaian

$a < 0$, maka $f(x)$ mempunyai titik maksimum.

$$\begin{aligned}b^2 - 4ac &= 4^2 - 4(-1)(12) \\ &= 16 + 48 \\ &= 64 (> 0)\end{aligned}$$

Lengkung menyalang paksi- x pada dua titik yang berbeza.

$$\begin{aligned}f(x) &= -x^2 + 4x + 12 \\ &= -(x^2 - 4x - 12) \\ &= -\left[x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 12\right] \\ &= -(x - 2)^2 + 16\end{aligned}$$



Titik maksimum ialah (2, 16) dan persamaan paksi simetri, $x = 2$.

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + 4x + 12 = 0$$

$$(-x + 6)(x + 2) = 0$$

$$-x + 6 = 0 \quad \text{atau} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 6$$

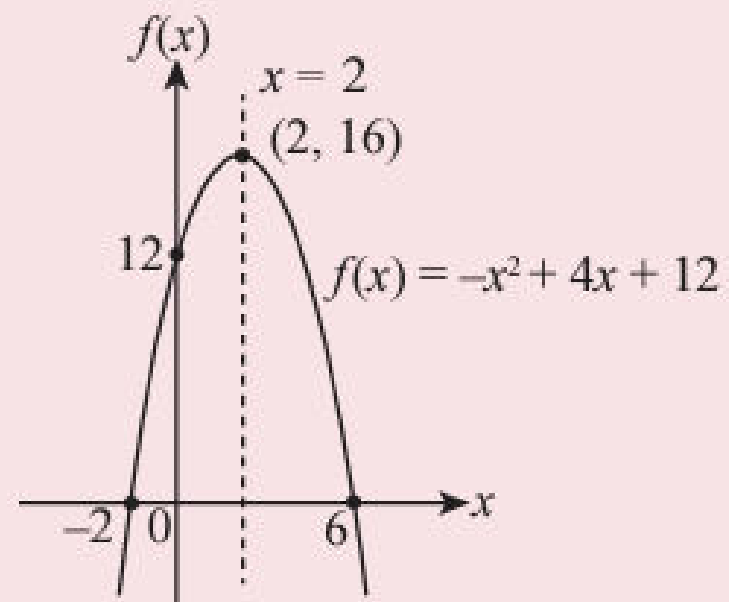
$$x = -2$$

Persilangan pada paksi- x ialah di $x = -2$ dan $x = 6$.

$$\begin{aligned} f(0) &= -(0)^2 + 4(0) + 12 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Graf menyilang paksi- y pada (0, 12).

Lengkung dilakar seperti rajah di sebelah.



Latih Diri 2.10

1. Lakarkan graf bagi setiap fungsi kuadratik yang berikut.

(a) $f(x) = (x - 1)^2 - 4$

(b) $f(x) = 2(x + 2)^2 - 2$

(c) $f(x) = 9 - (x - 2)^2$

(d) $f(x) = -2(x - 1)(x - 3)$

(e) $f(x) = -(x + 3)(x + 5)$

(f) $f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$

(g) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

(h) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$

(i) $f(x) = -x^2 + 4x + 12$



Contoh 16

APLIKASI MATEMATIK

Suresh dipilih untuk mewakili sekolah dalam pertandingan merejam lembing peringkat daerah. Suresh merejam batang lembing pada jarak 3 meter daripada permukaan tanah. Tinggi lembing yang direjam diberi oleh fungsi $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$, dengan keadaan h ialah ketinggian lembing, dalam meter, dan t ialah masa, dalam saat.

- Cari tinggi maksimum, dalam meter, lembing yang direjam oleh Suresh.
- Hitung masa, dalam saat, apabila lembing itu menyentuh permukaan tanah.

Menyelesaikan masalah fungsi kuadratik

1. Memahami masalah

Fungsi bagi tinggi rejaman lembing ialah $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$, dengan h ialah ketinggian lembing, dalam meter, dan t ialah masa selepas lembing direjam, dalam saat.

2. Merancang strategi

- ◆ Ungkapkan fungsi kuadratik dalam bentuk verteks dan tentukan nilai maksimum.
- ◆ Selesaikan persamaan $h(t) = 0$ untuk mencari pintasan pada paksi- t , iaitu masa untuk lembing menyentuh permukaan tanah.

3. Melaksanakan strategi

(a) $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$

$$= -5\left(t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{3}{5}\right) \leftarrow \text{Jadikan pekali } t^2 \text{ sebagai 1}$$

$$= -5\left(t^2 - \frac{14}{5}t + \left(-\frac{7}{5}\right)^2 - \left(-\frac{7}{5}\right)^2 - \frac{3}{5}\right) \leftarrow \text{Tambah dan tolak } \left(\frac{\text{pekali } t}{2}\right)^2$$

$$= -5\left[\left(t - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{64}{25}\right]$$

$$= -5\left(t - \frac{7}{5}\right)^2 + \frac{64}{5} \leftarrow \text{Verteks ialah } \left(\frac{7}{5}, \frac{64}{5}\right)$$

Oleh sebab $a < 0$, maka nilai maksimum bagi $h(t)$ ialah $\frac{64}{5}$ apabila $t = \frac{7}{5}$.

Oleh itu, tinggi maksimum yang dicapai oleh lembing ialah $\frac{64}{5}$ meter = 12.8 meter.

(b) $h(t) = 0$

$$-5t + 14t + 3 = 0$$

$$5t^2 - 14t - 3 = 0$$

$$(5t + 1)(t - 3) = 0$$

$$t = -\frac{1}{5} \text{ (diabaikan) atau } t = 3$$

Maka, masa apabila lembing menyentuh permukaan tanah ialah 3 saat.

4. Membuat refleksi

Fungsi $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$.

(a) Koordinat bagi tinggi maksimum:

$$\begin{aligned}t &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{14}{2(-5)} \\ &= 1.4\end{aligned}$$

Gantikan $t = 1.4$ ke dalam fungsi kuadrat,

$$\begin{aligned}h(1.4) &= -5(1.4)^2 + 14(1.4) + 3 \\ &= 12.8\end{aligned}$$

Maka, tinggi maksimum yang dicapai oleh lembing ialah 12.8 meter selepas 1.4 saat.

(b) Pada masa 3 saat:

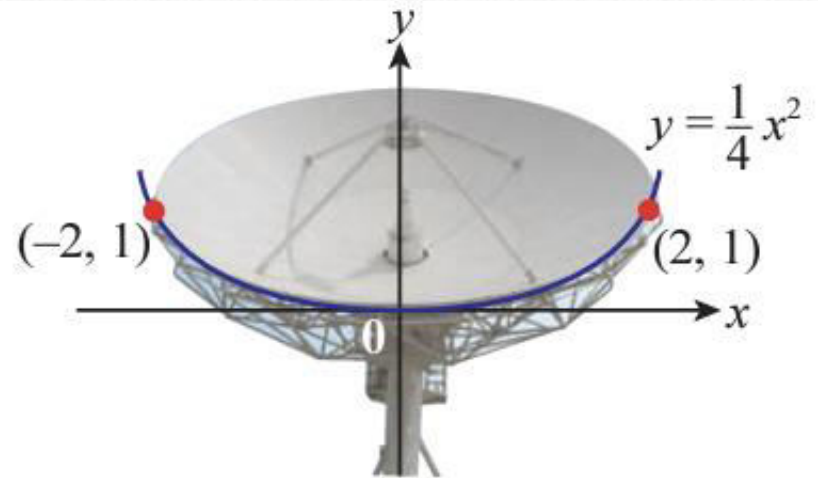
$$\begin{aligned}h(t) &= -5(3)^2 + 14(3) + 3 \\ &= -45 + 42 + 3 \\ &= 0\end{aligned}$$

Latih Diri 2.11

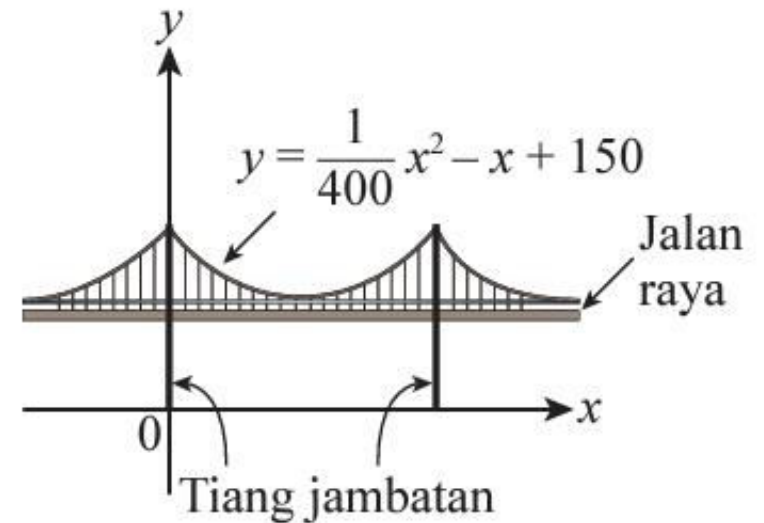
1. Fungsi $h(t) = -5t^2 + 8t + 4$ mewakili ketinggian h , dalam meter, seorang penerjun daripada permukaan air di sebuah kolam renang, t saat selepas terjun dari sebuah pelantar. Cari
 - (a) tinggi pelantar dari permukaan air, dalam meter,
 - (b) masa yang dicapai oleh penerjun itu pada ketinggian maksimumnya, dalam saat,
 - (c) tinggi maksimum yang dicapai oleh penerjun itu, dalam meter,
 - (d) julat masa selama penerjun itu berada di udara, dalam saat.
2. Sebuah terowong di lebuh raya berbentuk parabola. Tinggi lengkung parabola terowong itu, dalam meter, diberi oleh fungsi $h(x) = 15 - 0.06x^2$, dengan keadaan x ialah lebar terowong itu, dalam meter.
 - (a) Tentukan tinggi maksimum terowong itu, dalam meter.
 - (b) Cari lebar terowong itu, dalam meter.



3. Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas bagi sebuah satelit parabola yang fungsinya boleh diwakili oleh $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, dengan keadaan x dan y diukur dalam meter. Cari lebar dan kedalaman parabola itu, dalam meter.



4. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah jambatan. Fungsi kabel di antara dua tiang jambatan itu boleh diwakili oleh $y = \frac{1}{400}x^2 - x + 150$, dengan keadaan x dan y diukur dalam meter. Titik minimum bagi kabel terletak di atas jalan raya di tengah-tengah dua tiang itu.
- (a) Berapakah jarak titik minimum itu dengan setiap tiang?
(b) Berapakah tinggi jalan raya dari permukaan air?



Latihan Intensif 2.3

Imbas kod QR atau layari bit.ly/2Y6x1us untuk Kuiz



1. Cari nilai-nilai atau julat nilai k , jika fungsi kuadratik
 - (a) $f(x) = kx^2 - 4x + k - 3$ mempunyai hanya satu pintasan- x ,
 - (b) $f(x) = 3x^2 - 4x - 2(2k + 4)$ menyilang paksi- x pada dua titik yang berbeza.
2. Cari nilai terkecil bagi integer m dengan keadaan fungsi $f(x) = mx^2 + 7x + 3$ sentiasa positif untuk semua nilai nyata x .
3. Fungsi kuadratik f ditakrifkan oleh $f(x) = x^2 + 6x + n$, dengan keadaan n ialah pemalar.
 - (a) Ungkapkan $f(x)$ dalam bentuk $(x - h)^2 + k$, dengan keadaan h dan k ialah pemalar.
 - (b) Diberi nilai minimum bagi $f(x)$ ialah -5 , cari nilai n .
 - (c) Lakarkan lengkung $f(x)$.

4. Cari julat nilai r dengan keadaan garis $y = rx + 4$ tidak menyilang lengkung $y = x^2 - 4x + 5$. Nyatakan nilai-nilai r dengan keadaan garis $y = rx + 4$ ialah tangen kepada lengkung $y = x^2 - 4x + 5$.
5. Terangkan kesan setiap perubahan fungsi berikut terhadap bentuk dan kedudukan graf.
- (a) Mengubah $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$ kepada $f(x) = 6(x - 1)^2 + 2$.
 - (b) Mengubah $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$ kepada $f(x) = 3(x - 4)^2 + 2$.
 - (c) Mengubah $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$ kepada $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$.
6. Ketinggian, h , dalam meter, seekor burung untuk menangkap ikan di sebuah tasik boleh diwakili oleh fungsi $h(t) = 2(t - 3)^2$, dengan keadaan t ialah masa, dalam saat, apabila burung tersebut mula bergerak untuk menangkap ikan.
- (a) Lakarkan graf $h(t)$.
 - (b) Gerakan seekor burung lain pula diwakili oleh fungsi $r(t) = 2h(t)$. Lakarkan graf $r(t)$.
 - (c) Bandingkan graf $h(t)$ dengan $r(t)$. Burung yang manakah mula bergerak pada kedudukan tertinggi? Jelaskan.



7. Diberi fungsi kuadratik $f(x) = 3 - 4k - (k + 3)x - x^2$, dengan keadaan k ialah pemalar, adalah sentiasa negatif apabila $p < k < q$. Cari nilai p dan nilai q .

8. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah jambatan PQ dengan panjang 8 m yang melintasi sebatang sungai. Kabel penyokong ABC pada jambatan itu boleh diwakili oleh fungsi $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + bx + c$, dengan keadaan b dan c ialah pemalar.

(a) Cari nilai b .

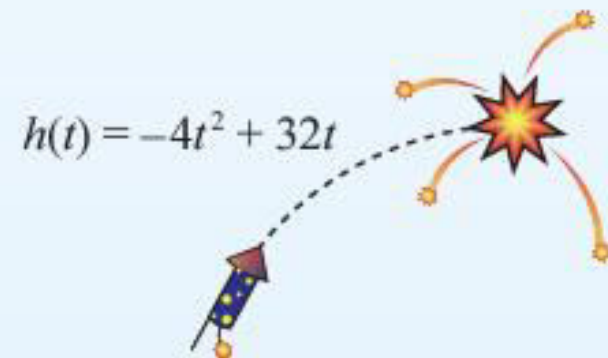
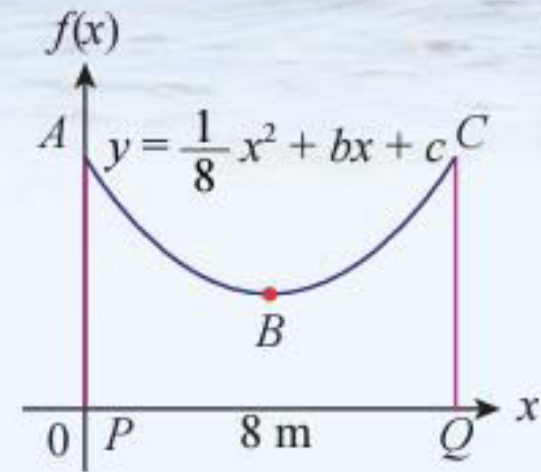
(b) Cari julat nilai c dengan keadaan titik minimum B pada kabel itu sentiasa berada di atas PQ .

(c) Cari nilai c jika B adalah 2 m di atas PQ .

9. Fungsi $h(t) = -4t^2 + 32t$ seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah mewakili tinggi, dalam meter, bunga api, t saat selepas dilancarkan. Bunga api itu meletup pada titik tertinggi.

(a) Bilakah bunga api itu meletup?

(b) Pada ketinggian berapakah bunga api itu meletup?



10. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi $y = -(x - \alpha)(x - \beta)$, dengan keadaan $\alpha < \beta$.

(a) Diberi bahawa M ialah titik tengah bagi AB , ungkapkan panjang yang berikut, dalam sebutan α dan/atau β .

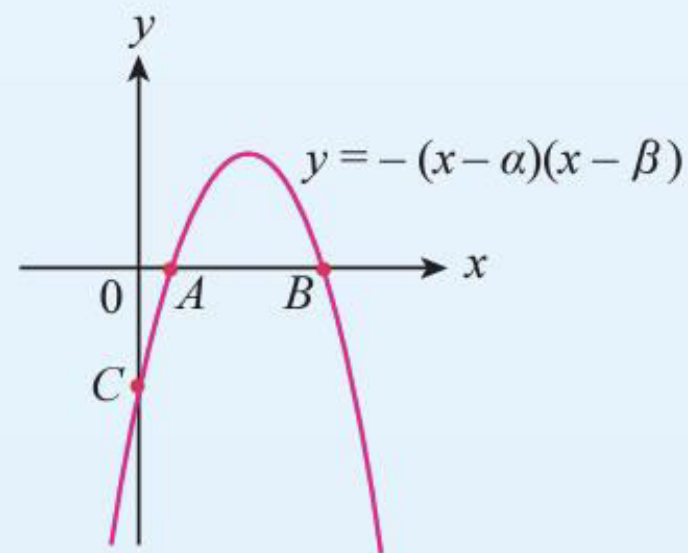
(i) OA

(ii) OB

(iii) OC

(iv) OM

(b) Secara geometri, bolehkah anda tafsirkan $\frac{\alpha + \beta}{2}$ dan $-\alpha\beta$ dalam rajah itu?



11. Nilai minimum bagi $f(x) = x^2 - 4nx + 5n^2 + 1$ ialah $m^2 + 2n$ dengan keadaan m dan n ialah pemalar. Tunjukkan bahawa $m = n - 1$.

A photograph of a skateboarder in mid-air, performing a trick on a concrete ramp at a skate park. The skateboarder is wearing a white long-sleeved shirt and dark pants. The ramp is light-colored concrete. In the background, there are trees and a blue fence. The word "Journal." is written in a green circle on the right side of the ramp. The word "Tamat" is overlaid in the center in a white serif font.

Tamat

Journal.